

常微分方程笔记

Yuang Lu

2025 秋

目录

1 绪论	5
2 初等解法	11
2.1 分离变量法	11
2.1.1 可直接分离变量的方程	11
2.1.2 齐次方程	12
2.1.3 形如 $\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c)$ 的方程	12
2.1.4 形如 $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1x+c}{a_2t+b_2x+c}\right)$ 的方程	12
2.2 线性方程	13
2.3 全微分方程与积分因子	15
2.4 导数未解出的一阶方程	17
2.4.1 可直接求解	17
2.4.2 形如 $x = f(t, \dot{x})$ 的方程	17
2.4.3 形如 $t = g(x, \dot{x})$ 的方程	17
2.5 高阶方程的降阶	18
2.5.1 缺少低阶项的方程	18
2.5.2 缺少自变量的方程	18
2.5.3 齐次方程	19
2.5.4 全微分方程和积分因子降阶	19
2.6 解微分方程组及首次积分	19
3 线性常微分方程	23
3.1 二阶线性方程	23
3.2 n 阶线性方程	28
3.2.1 逆算子的求解	30

4	线性微分方程组	33
4.0.1	对于矩阵值函数的基本运算	33
4.0.2	e^{At} 的定义以及性质	36

Chapter 1

绪论

交作业时间定在每周三一、二节课之间。

微分方程：联系未知函数，未知数导数以及自变量的等式关系。常微分方程：仅含有一个自变量的微分方程。但是 ODE 和 PDE 的分野并不明确，例如下面的时滞方程

$$\frac{dx}{dt} = x(t-1)$$

不能算作 ODE.

例 (一个几何问题). 试确定曲线 Γ 的方程, 该曲线在坐标系 tOx 中, 过 Γ 上任意一点的切线于该点和坐标原点之连线垂直. 这个关系对应了一个 ODE:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{x}{t} = -1.$$

实际上, 这是一个一阶常微分方程, 因为在这个方程中, 显含的最高微分是一阶。

例. 考虑如下微分方程:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t).$$

此方程被应用在生物生态种群、放射性物质衰变等处。这是一个一阶常系数线性 ODE, 因为未知数和未知数的导数是线性关系, 而且系数是常数。这种行为不受外界因素影响的系统称为自治系统。

易知

$$N(t) = Ce^{\lambda t},$$

其中 C 是常数, 是上面方程的解。是否是一切解?

如果规定 $N(t_0) = N_0$, 那么

$$N(t) = N_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

这是满足特定初始条件的特解。 $N(t) \equiv 0$ 是常值特解。通常将方程和初始条件并立

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

称为初值问题或 Cauchy 问题。

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

问题(1.1)和(1.2)是否可以转化也是我们关心的问题。实际上, 在(1.2)中令 $T = t - t_0$, 并转化为

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{N}}{dT} = \lambda \widehat{N} \\ \widehat{N}(0) = N_0 \end{cases}$$

作业: 如果系数 $\lambda(t)$ 显含 t , 使得系统不再是自治的, 那么两个方程是否还是可以相互转化, 条件是什么?

例 (单摆模型).

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta.$$

是一个二阶非线性 ODE, 也是一个自治系统。

通常我们通过换元转化为两个一阶方程

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases}$$

常值特解为 $(k\pi, 0)$ 。

如果作出近似, 可以转化为线性方程

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} \theta \end{cases}$$

一个有意义的问题是, 是否存在相空间中的同胚, 将近似解 $(\theta^*(t), y^*(t))$ 映为原解 $(\theta(t), y(t))$, 进而二者有相同的性质。

例 (LRC 电路). 考虑图 1.1所示 LRC 电路:

$$e(t) = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(s) ds$$

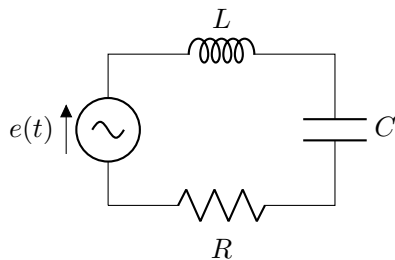


图 1.1: LRC 电路

两边求导得到

$$\dot{e}(t) = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I(t)$$

是一个二阶线性非齐次 ODE。或者引入 $y = \int_0^t I(s)ds$ 得到类似的方程。

例 (Lorentz 系统).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

作业：讨论在各种参数情况下的常值特解？

例 (Hodgkin-Huxley 模型). 如下微分方程组描述了单个生物神经元的活动。

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = I - [120m^3h(v+15) + 36n^4(v-12) + 0.3(v+10.599)] \\ \frac{dm}{dt} = (1-m)\psi\left(\frac{v+25}{10}\right) - m(4e^{\frac{v}{18}}) \\ \frac{dn}{dt} = (1-n)0.1\psi\left(\frac{v+10}{10}\right) - n(0.125e^{\frac{v}{80}}) \\ \frac{dh}{dt} = (1-h)0.07e^{\frac{v}{80}} - \frac{h}{1+e^{\frac{v+30}{10}}}, \end{cases}$$

其中, $\psi(x) = \frac{x}{e^x + 1}$, I 表示接受的刺激。这是一个四维一阶常微分方程, 非线性性相当高。多个神经元的耦合仍然是一个重要的问题。

例 (人工神经网络的建模, Hopfield-NNs). 为了简化现实情形的复杂情况, 人们提出了人工神经网络

$$\frac{dx_i}{dt} = -R_i x_i + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 f 是激励函数。

总结一下基本概念：

- 微分方程的阶；
- 线性与非线性方程；
- 方程的解：若有方程 $F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)} = 0$, 设 $\varphi \in C^n(a, b)$, 使得

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t) \equiv 0, \forall t \in (a, b)$$

, 称 $\varphi(t)$ 是方程在 (a, b) 上的解。

- 方程的特解：满足特定初始条件的解。常值特解。一切解；通解。

在 n 阶方程中，方程的阶有 n 个独立常数 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ，称为通解，其中常数独立的意思是，对于解 $\varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例. 方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

的隐式解和显示解分别是

$$x^2 + t^2 = C, \quad x = \pm \sqrt{C - t^2}.$$

它们都称为方程的积分。

例. 考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \sqrt{|x|}.$$

可以验证

$$x(t) = \begin{cases} (t+c)^2, & t > -c, \\ -(t+c)^2, & t \leq -c, \end{cases}$$

是方程的通解，但是无法囊括特解 $x \equiv 0$ 。

值得注意的是，大部分常微分方程无法得到解析解，这时就需要使用其他方法研究解的演化。例如，可以绘制积分曲线。对方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

而言，设 $-\frac{t}{x} = k^1$, $x = -\frac{1}{k}t$ ，这是一个在平面上的方向场（如图 1.2）。

¹ k 称为方向场。

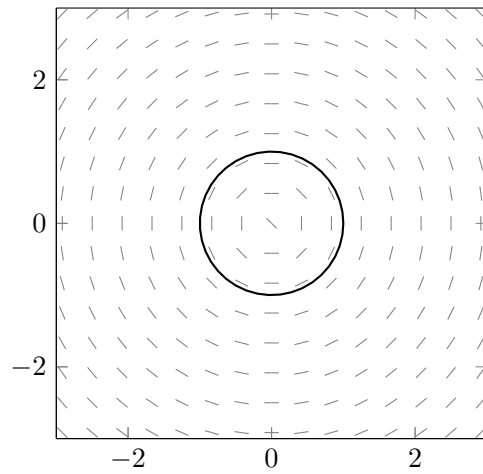


图 1.2: 方程对应的方向场

另一种方式是将连续常微分方程转化为离散动力系统，

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} = f(x(t)).$$

Chapter 2

初等解法

2.1 分离变量法

2.1.1 可直接分离变量的方程

形如

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \quad (2.1)$$

的方程的一切解可以表示为通积分的表达式

$$\begin{cases} \text{特解 } x = x^*, \text{ 其中 } g(x^*) = 0, \\ \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^t f(s)ds, \text{ 初始条件 } (t_0, x_0). \end{cases}$$

证明. 特解的表达式容易验证的. 对 $g(x) \neq 0$, 设 $\varphi(t)$ 是方程(2.1)的解, $\varphi(t_0) = x_0$,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t)g(\varphi(t)), \quad g(\varphi(t)) \neq 0, t, t_0 \in (a, b).$$

于是

$$\int_{x_0}^x \frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))} = \int_{t_0}^t f(t)dt.$$

反之,

$$\psi(t, x) \triangleq \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^t f(s)ds, \quad \psi(t_0, x_0) = 0,$$

其中 ψ, ψ_x 连续, $\psi_x(t_0, x_0) \neq 0$, 由隐函数存在定理知, 存在 $\delta > 0$ 及在 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上的函数 $\varphi(t)$, 使得

1. $\varphi(t_0) = x_0$;

2. $\psi(t, \varphi(t)) \equiv 0, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

□

2.1.2 齐次方程

形如

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right),$$

其中 $f\left(\frac{x}{t}\right) = f\left(\frac{kx}{kt}\right)$ 是关于 x, t 的齐次函数, 引入 $u = \frac{x}{t}$, $x = ut$, 则

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{du}{dt} \cdot t + u, \\ \frac{du}{dt} \cdot t &= f(u) - u, \\ \int \frac{du}{f(u) - u} &= \int \frac{1}{t} dt + C\end{aligned}$$

以及常值特解 $f(u^*) = u^*$ 。

2.1.3 形如 $\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c)$ 的方程

引入 $y = at + bx + c$, 则

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= a + b \frac{dx}{dt} = a + bf(y), \\ \int \frac{dy}{a + bf(y)} &= \int dt + C\end{aligned}$$

以及常值特解 $y^* : a + bf(y^*) = 0$ 。

作业: 《常微分方程》金福临等, 14 页/5,8。31 页/2,5,7,8。

2.1.4 形如 $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c}{a_2 t + b_2 x + c}\right)$ 的方程

分类讨论:

1. $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 待定系数

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v = a_1 t + b_1 x + c_1 \\ a_2 u + b_2 v = a_2 t + b_2 x + c_2 \end{cases}$$

设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, 则 $A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \mathbf{c}$, 得到 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + A^{-1} \mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 。

这样原方程就转化为齐次方程

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

2. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$, 引入 $y = a_1 t + b_1 x$, 转化为

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + b_1 f\left(\frac{y + c_1}{ky + c_1}\right).$$

例. 方程

$$\frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2$$

可以通过 $u = t - 3, v = x + 2$ 转化为

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2.$$

再做代换 $s = \frac{u}{v}$ 化简为

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2 + 1}\right) ds + \frac{du}{u} = 0.$$

积分得到

$$\ln |su| + 2 \arctan s = C,$$

于是原方程的通积分是

$$x + 2 = C' \exp\left(-2 \arctan \frac{x+2}{t-3}\right).$$

例 (探照灯原理). 如图 2.1 所示, 点光源发出的光经过曲面反射后变成平行光, 则曲面方程满足

$$\frac{dx}{dt} = \tan \alpha = \frac{x}{t + \sqrt{t^2 + x^2}}.$$

代换 $u = x/t$, 则有

$$\frac{u dt + t du}{dt} = \frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \implies \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2}}\right) du + \frac{dt}{t} = 0$$

积分得

$$t(\sqrt{u^2 + 1} - 1) = C$$

最终有 $x^2 = 2Ct + C^2$, 是一条抛物线.

2.2 线性方程

线性方程是指形如

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = Q(t), \quad (2.2)$$

的方程, 其中 $p(t), Q(t)$ 于 (α, β) 上连续. 如果 $Q(t) \equiv 0$, 则(2.2)为齐次线性方程; $Q(t) \neq 0$, 那么(2.2)为非齐次方程.

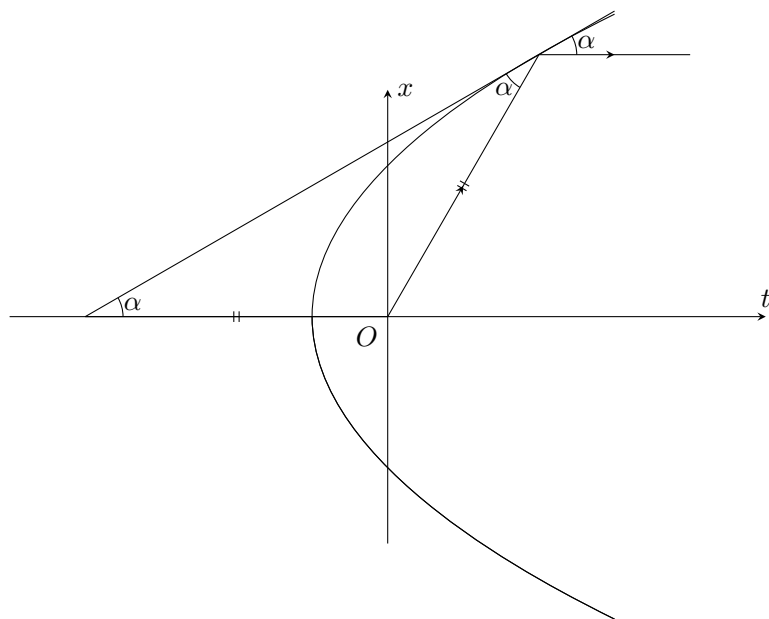


图 2.1: 探照灯

1. $Q(t) \equiv 0$, $\frac{dx}{dt} = -p(t)x$, $x^* = 0$ 是常值特解。如果 $x \neq 0$, 那么

$$\int \frac{dx}{x} = - \int p(t) dt \quad \Rightarrow \quad x = C \exp \left(- \int p(t) dt \right),$$

2. $Q(t) \neq 0$, 在两边同乘因子 $\exp \left(\int p(t) dt \right)$,

$$\begin{aligned} \exp \left(\int p(t) dt \right) \frac{dx}{dt} + \exp \left(\int p(t) dt \right) p(t)x &= Q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\exp \left(\int p(t) dt \right) x \right) &= Q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \\ \Rightarrow x(t) = \exp \left(- \int p(t) dt \right) \left(C + Q(t) \int \exp \left(\int p(t) dt \right) dt \right). \end{aligned}$$

例 (Bernoulli 方程).

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = Q(t)x^k.$$

引入 $y = x^{1-k}$, 那么 $\frac{dy}{dt} = (1-k)x^{-k} \frac{dx}{dt}$, 所以原方程就转化为

$$\frac{dy}{dt} + (1-k)p(t)y = (1-k)Q(t).$$

这是一个线性方程。

例 (Ricatti 方程).

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x^2 = C(t). \quad (2.3)$$

设 $x^* = \varphi(t)$ 是方程(2.3)的一个特解¹, 方程可以转化为

$$\frac{dx - \varphi}{dt} + a(t)(x - \varphi) + b(t)(x - \varphi)(x + \varphi) = 0.$$

引入 $y = x - \varphi$, 则有

$$\frac{dy}{dt} + (a(t) + 2\varphi)y + v(t)y^2 = 0$$

是一个 Bernoulli 方程。

例.

$$\frac{dx}{dt} \cdot \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{t}{x^2} \right) = 1.$$

将 $\frac{dx}{dt}$ 移到等式右边,

$$e^{-\frac{1}{x}} + \frac{t}{x^2} = \frac{dt}{dx}.$$

例.

$$\frac{dx}{dt} = kx + f(t), \quad f(t) = f(t + \omega).$$

这是一个线性方程, 所以

$$x(t) = Ce^{kt} + e^{kt} \int_0^t e^{k(t-s)} f(s) ds.$$

设 $u(t) = x(t) - x(t + \omega)$, 其中 $x(t)$ 是方程的任意解。可以发现 $x(t + \omega)$ 亦是方程的解, 因此 $u(t)$ 就是齐次方程

$$\frac{du}{dt} = ku$$

的解。如果确定 $x(0) = x(\omega)$, 即 $u(0) = 0$, 那么一定有 $u(t) \equiv 0$ 。这表明在一点处满足 $x(0) = x(\omega)$ 的解满足 $x(t) \equiv x(t + \omega), \forall t \in \mathbb{R}$, 即原方程有唯一的周期解。

2.3 全微分方程与积分因子

研究形如

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

或

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$$

¹凑出来。

的方程。其实，上式是一个恰当微分形式当且仅当这是一个闭微分形式，即

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

在这个条件下，我们有解 $u(t, x)$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= M(t, x), u(t, x) = \int M(t, x) dx + \varphi(x). \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= N(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt + \varphi'(x), \varphi'(x) = N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt. \\ \varphi &= \int N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \iint M(t, x) dt \end{aligned}$$

例.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e^t + x}{\cos x + t}.$$

可以转化为

$$(e^t + x)dt + (\cos x + t)dx = 0.$$

有解 $e^t + xt + \sin x = C$.

如果(2.4)条件不成立，那么可以乘上因子 $\mu(t, x)$,

$$\mu(t, x)M(t, x)dt + \mu(t, x)N(t, x)dx = 0$$

使得新方程满足条件。 μ 被称为积分因子。

作业：31 页/11, 13。32 页/15, 17, 20, 21, 26, 29。

若要求出 $\mu(t, x)$ ，可以写出

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} \mu(t, x) + M(t, x) \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} \mu(t, x) + N(t, x) \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t}.$$

这个 PDE 的求解异常困难。所以我们时常预设 $\mu(t, x)$ 的形式，比如假设 μ 与 t 无关而仅仅与 x 有关，即 $\mu(t, x) = \mu(x)$ ，那么

$$\frac{\partial M}{\partial x} \mu(x) + M \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial N}{\partial t} \mu.$$

整理得

$$\frac{d\mu}{dx} = \boxed{\frac{1}{M(t, x)} \left(\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} \right)} \mu(x),$$

要求加框的部分仅与 x 有关。

2.4 导数未解出的一阶方程

考虑形如

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

的方程，其中导数 $\dot{x}$ 未被解出。

2.4.1 可直接求解

例. 方程

$$(\dot{x})^2 + 2t\dot{x} + t^2 - x^2 = 0$$

可直接求解

$$(\dot{x} + t - x)(\dot{x} + t + x) = 0.$$

2.4.2 形如 $x = f(t, \dot{x})$ 的方程

对于方程

$$x = f(t, \dot{x}),$$

两边关于 t 求导，引入 $p = \dot{x}$,

$$p = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt},$$

由此可以确定上述关于 p 的方程的通积分为 $\varphi(t, p) = C$ ，或者 $p = \hat{\varphi}(t, c)$ 。注意从 p 求解 x 的过程中，积分会引入新的一个常数，但是一阶方程只能有一个独立常数，需要关注两次积分引入的常数的关系。但是其实利用关系式 $x = f(t, p)$ 代入即可得到 $x = f(t, \hat{\varphi}(t, c))$ 。

或者有隐式解

$$\begin{cases} t = \eta(p, c) \\ x = f(t, p) \end{cases}$$

其中 p 是参数，称为解的参数化表达。

2.4.3 形如 $t = g(x, \dot{x})$ 的方程

引入 $\dot{x} = p$ ，两边对 x 求导

$$\frac{1}{p} = \frac{dt}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

可以视为关于 p - x 的 ODE。设有显示解 $p = \xi(x, c)$ ，可以得到

$$t = g(x, \xi(x, c)).$$

例 (Lagrange 方程). 方程

$$x = t\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

设 $p = \dot{x}$, 两边关于 t 求导,

$$p = \varphi(p) + (t\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dt} \implies (t\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dt} = p - \varphi(p).$$

或者

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

是一个线性方程。可以解出

$$\begin{cases} t(p) = \exp\left(\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp\right) \cdot \left(C + \int \exp\left(-\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp\right) \cdot \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} dp\right) \\ x = t(\varphi(p)) + \psi(p) \end{cases}$$

另外有特解 $p^* = \varphi(p^*)$ 。

2.5 高阶方程的降阶

考虑形如

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

的 n 阶方程。

2.5.1 缺少低阶项的方程

如果方程形如

$$F(t, x^{(k)}, \dots, x^{(n)}) = 0,$$

可以引入 $y = x^{(k)}$, 于是方程可变化为

$$F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-k)}) = 0.$$

2.5.2 缺少自变量的方程

如果方程形如

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

是一个自治系统 (定常系统)。引入 $\frac{dx}{dt} = y$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= \left(\frac{d}{dx} \frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dy}{dx} y\right) = \frac{d^2y}{dx^2} y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y. \end{aligned}$$

以此类推。

例. 一个考虑一个木块在液体中的运动.

$$m\ddot{x} = \hat{F} = G - F - c\dot{x} \implies m\ddot{x} + c\dot{x} = G - F.$$

方法一: 引入 $y = \dot{x}$, 则 $m\dot{y} + cy = G - F$ 。方法二: 引入 $y = \dot{x}$, $m\frac{dy}{dx}y + cy = G - F$ 。

2.5.3 齐次方程

如果 $F(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ 是 m 次齐次函数, 可以做变换

$$x^m F\left(t, 1, \frac{\dot{x}}{x}, \frac{\ddot{x}}{x}, \dots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0.$$

引入 $y = \frac{\dot{x}}{x}$, $x = e^{\int y(t)dt}$, 那么

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \exp\left(\int y(t)dt\right) \\ \ddot{x} &= (y^2 + \dot{y}) \exp\left(\int y(t)dt\right)\end{aligned}$$

以此类推。

2.5.4 全微分方程和积分因子降阶

例. 方程

$$x \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

两边同乘 $\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$, 但 $x^*(t) \equiv 0$ 是特解), 有

$$\frac{1}{x} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

所以 $\frac{dx}{dt} = Cx$, 进而 $x(t) = C_1 e^{Ct}$ 。

2.6 解微分方程组及首次积分

如下的方程是 n 维 ODEs。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。

例. 二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin x$$

可以转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x \end{cases}$$

设 $\mathbf{x} = \vec{\varphi}(t), t \in (\alpha, \beta)$ 是方程组的任意一解, 并且存在一个非常值的多元函数 $\Phi(t, \mathbf{x})$, 使得 $\Phi(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv C$, 则称 $\Phi(t, \mathbf{x}) = C$ 为方程组的一个首次积分。

例. 在上一个例子里, 经过计算

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-\frac{g}{l} \sin x} \implies \int -\frac{g}{l} \sin x dx = \int y dy + C$$

则 $\Phi(x, y) \triangleq \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l} \cos x = C$ 是首次积分。注意到 Φ 是单摆的能量。

命题 2.1. 非常值多元函数构成的 $\Phi(x, t) = C$ 是方程(2.5)的首次积分的充要条件是

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall t, x \in \mathcal{D}.$$

证明. 充分性. 设 $\mathbf{x} = \vec{\varphi}(t)$ 是方程组的任意解, 想要说明 $\Phi(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv C$. 对 t 求导,

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \vec{\varphi}(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{(t, \mathbf{x})=(t, \vec{\varphi}(t))} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{(t, \mathbf{x})=(t, \vec{\varphi}(t))} \frac{d\varphi_i}{dt} \equiv 0$$

必要性. 若 $\Phi(t, x) = C$ 是方程组的首次积分, 对任意解 $\vec{\varphi}(t)$, 成立 $(\Phi(t, \vec{\varphi}(t)) \equiv C$, 则

$$\frac{\partial \Phi(t, \vec{\varphi}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(t, \vec{\varphi}(t))}{\partial x_i} f_i(t, \vec{\varphi}(t)) = 0.$$

所有解可以覆盖的区域则记为 $\mathcal{D}$. □

注. 求解 n 维 ODEs 的问题就变成下面两个子问题。

1. 若 $\Phi(t, \mathbf{x}) = C$ 是方程组一个首次积分, 不妨设 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \neq 0$, 用 $x_n = \varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, C)$ 将方程组(2.5)降维。
2. 求 n 个独立的首次积分, $\Phi_i(t, \mathbf{x}) = c_i, i = 1, 2, \dots, n$, $\tilde{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$, $\left| \frac{\partial \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right| \neq 0$ 。

例.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.6) \\ (2.7) \end{matrix}$$

将(2.6)乘以 2 减去(2.7)，得到

$$\frac{d(2x - y)}{dt} = -(2x - y), \quad \implies \quad 2x - y = C_1 e^{-t}.$$

将 $y = 2x - C_1 e^{-t}$ 代入(2.6)可得 $\dot{x} = 5x - 2C_1 e^{-t}$.

另一种方法是将(2.6)和(2.7)相除，得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{4x + 3y}.$$

例.

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

可以得到

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \implies \quad x = C_1 y, C_1 \neq 0.$$

重新整理原式

$$\frac{2x dx}{2x(2xz)} = \frac{2y dy}{2y(2yz)} = \frac{2z dz}{2z(z^2 - x^2 - y^2)}$$

并对分子和分母求和

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2z(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dx}{2xz} \quad \implies \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2 x, C_2 \neq 0.$$

于是得到两个独立的首次积分

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 x \end{cases}$$

Chapter 3

线性常微分方程

前面我们已经处理过了一阶线性常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(t).$$

它的解可以通过常数变易公式来表示

$$x(t) = Ce^{at} + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} f(s) ds.$$

3.1 二阶线性方程

对于二阶线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t), \quad (3.1)$$

如果有 $f(t) \equiv 0$, 就变成一个常系数线性方程 $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0$, 但是在之前涉及的降阶过程后会引入非线性项。我们绕开这条线路。

受到一阶方程的启发, 我们试图寻找指数函数形式的解。将 $e^{\lambda t}$ 代入(3.1)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t} = 0.$$

则称 $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ 为线性方程(3.1)的特征方程, 它的根称为特征值。根 $\lambda_{1,2}$ 或为实, 或为虚。实数的情况很好理解, 需要考虑 $e^{\lambda t}$, 其中 λ 是虚数。

设 $z(t) = u(t) + iv(t)$, 其中 $u(t), v(t)$ 是 (α, β) 上的实值函数, i 为复数单位, 称 $z(t)$ 为复值函数。那么

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} v(t)$, 并由此可以讨论复值函数的连续性, 即 $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z(t_0)$ 。
2. $z'(t) = u'(t) + iv'(t)$ 。

$$3. \int_a^b z(s)ds = \int_a^b u(s)ds + i \int_a^b v(s)ds.$$

于是若复值函数 $z(t)$ 满足 $\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_2z(t) = 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$, 称之为方程(3.1)的复值解。

对于 $e^{\lambda t}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, 则

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

而且有如下性质

1. $e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 t}$,
2. $\overline{e^{\lambda t}} = e^{\bar{\lambda} t}$,
3. $\frac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \lambda$.

命题 3.1 (叠加原理). 设 $z_1(t), z_2(t)$ 均为方程(3.1)的解, 则 $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ 亦是方程的(3.1)。

如果知道了特征方程的两根 $\lambda_{1,2}$, 由 Viète 定理,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dx}{dt} + \lambda_1 \lambda_2 x = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x \right) - \lambda_2 \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x \right) = 0.$$

由此可得 $\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x = c_1 e^{\lambda_2 t}$. 再由对称性, 同样有 $\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = c_2 e^{\lambda_1 t}$. 两式相减, 就有

$$(\lambda_2 - \lambda_1)x = c_1 e^{\lambda_2 t} - c_2 e^{\lambda_1 t}.$$

1. 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 解自然可以表达为

$$x(t) = \frac{c_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{c_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t}.$$

2. 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 时, $\frac{dx}{dt} = \lambda x + c_1 e^{\lambda t}$, 于是

$$x(t) = e^{\lambda t} \left(C + \int e^{-\lambda t} C_1 e^{\lambda t} dt \right) = e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

综上, 二阶常系数线性齐次方程的复值通解可以表示为

$$X(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, & \lambda_{1,2} = \lambda, \end{cases} \quad C_{1,2} \in \mathbb{C}.$$

对于具有特定物理意义的场景, 我们还关心方程的实值通解。假如 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 是一对共轭虚根, 如果 $X(t)$ 是实数, 即 $X(t) = \overline{X(t)}$, 那么

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} &= \overline{C_1} e^{\lambda_2 t} + \overline{C_2} e^{\lambda_1 t}, (C_1 - \overline{C_2}) + (C_2 - \overline{C_1}) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0, \\ -2\beta i (C_2 - \overline{C_1}) e^{-2\beta i t} &= 0, \quad \forall t \\ C_2 &= \overline{C_1}. \end{aligned}$$

$$X(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1, \lambda_2 \text{ 实}, \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, & \lambda_1 = \lambda_2, \\ e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), & \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i (\beta \neq 0). \end{cases} \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}$$

命题 3.2. 1. $t \rightarrow \infty$ 时 $X(t) \rightarrow 0$ 的充要条件是 $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ 。

2. $X(t)$ 于 $(0, +\infty)$ 上有界的充要条件是 $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) \leq 0$ 且在 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时要求 $\lambda_1 < 0$ 。

例. 1. $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$,

2. $\dot{x} + 2x + \int_0^t x(s) ds = 0$ 。

命题 3.3. 初值问题

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0 \\ x(0) = s_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

的解于 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且唯一。

证明. 1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 实, $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, 则

$$x \begin{cases} (0) = c_1 + c_2 = s_0 \\ \dot{x}(0) = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = v_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

其中行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 于是 c_1, c_2 可以唯一确定。

2. $\lambda_{1,2} = \lambda$ 类似的。

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ 类似的。

□

例 (Euler 方程).

$$t^2 \ddot{x} + a_1 t \dot{x} + a_2 x = 0.$$

如果 $t \neq 0$, 两边同时乘 $\frac{1}{t^2}$, 得

$$\ddot{x} + \frac{a_1}{t} \dot{x} + \frac{a_2}{t^2} x = 0.$$

特征方程是 $\lambda^2 + \frac{a_1}{t} \lambda + \frac{a_2}{t^2} = 0$ 有根 $\lambda_{1,2}$, 但这样的解不能套用上面的公式。为了解决变系数的问题, 引入 $s = \ln |t|$ 。则

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{ds}, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \frac{dx}{ds} \right) = -\frac{1}{t^2} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t^2} \frac{d^2 x}{ds^2}. \end{aligned}$$

于是原方程变成

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (a_1 - 1)\frac{dx}{ds} + a_2x = 0.$$

特征方程是 $\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_2 = 0$, 有根 $\lambda_{1,2}$, 进而解就是

$$X(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 s} + C_2 e^{\lambda_2 s} = C_1 |t|^{\lambda_1} + C_2 |t|^{\lambda_2}, & \lambda_{1,2} \text{实}, \\ (C_1 + C_2 \ln |t|) |t|^\lambda, & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \\ |t|^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln |t|) + C_2 \sin(\beta \ln |t|)), & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta (\beta \neq 0) \end{cases} \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

作业: 62 页/1,3,5,8,10, 83 页/1/(1),(3),(8), 84 页/3,[5,6]。

研究了线性齐次常微分方程, 现在转向研究非齐次的方程(3.1)。同样有特征方程

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

同样有解 $\lambda_{1,2}$ 。同样的化简

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x \right) - \lambda_2 \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x \right) = f(t).$$

因此结合对称性,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \lambda_1 x &= C_1 e^{\lambda_2 t} + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} f(s) ds \\ \frac{dx}{dt} - \lambda_2 x &= C_2 e^{\lambda_1 t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} f(s) ds. \end{aligned}$$

两式相减,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)x = C_1 e^{\lambda_2 t} - C_2 e^{\lambda_1 t} + \int_0^t (e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}) f(s) ds.$$

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 得到

$$x(t) = \frac{C_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{C_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s) ds, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 只有

$$\begin{aligned} x(t) &= C_2 e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \left(C_1 e^{\lambda s} + \int_0^s e^{\lambda(s-p)} f(p) dp \right) ds \\ &= C_2 e^{\lambda t} + \int_0^t C_1 e^{\lambda t} ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \int_0^s e^{\lambda(t-s)} f(p) dp ds \\ &= C_2 e^{\lambda t} + C_1 t e^{\lambda t} + \int_0^t \int_0^s e^{\lambda(t-p)} f(p) dp ds. \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^t \int_0^s e^{\lambda(t-p)} f(p) dp ds = \int_0^t \int_p^t e^{\lambda(t-p)} f(p) ds dp = \int_0^t (t-p) e^{\lambda(t-p)} f(p) dp.$$

所以

$$x(t) = C_2 e^{\lambda t} + C_1 t e^{\lambda t} + \int_0^t (t-p) e^{\lambda(t-p)} f(p) dp.$$

整理得到复值通解的表达式,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{C_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s) ds, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ C_2 e^{\lambda t} + C_1 t e^{\lambda t} + \int_0^t (t-p) e^{\lambda(t-p)} f(p) dp, & \lambda_{1,2} = \lambda \end{cases} \quad C_{1,2} \in \mathbb{C}.$$

而实值通解的表达式就是

$$x(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{C_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s) ds, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 实} \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} + \int_0^t (t-s) e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, & \lambda_{1,2} = \lambda \\ e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + \int_0^t \frac{e^{\alpha(t-s)}}{\beta} \sin \beta(t-s) f(s) ds, & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \end{cases} \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

例 (受迫振动).

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

则 $x = x_1(t) + x^*(t)$, 其中 $x_1(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$, $x^*(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-s) A \sin \omega s ds$.

解在 $\omega_0 = \omega$ 和 $\omega_0 \neq \omega$ 上的表现不同。

注意到, 非齐次方程的解都可以写成

$$x(t) = x_1(t) + x^*(t),$$

其中 $x_1(t)$ 是对应齐次方程的通解, 而

$$x^*(t) = \int_0^t k(t-s) f(s) ds,$$

称 $k(t)$ 为核函数, 并且满足

$$\begin{cases} \ddot{k}(t) + a_1 \dot{k}(t) + a_2 k(t) = 0 \\ k(0) = 0, \quad \dot{k}(0) = 1. \end{cases}$$

如果对 $x^*(t)$ 求导, 得到

$$\begin{aligned}\frac{dx^*(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-s)f(s)ds = \int_0^t \frac{dk(t-s)}{dt} f(s)ds + k(0)f(t) = \int_0^t \frac{dk(t-s)}{dt} f(s)ds \\ \frac{d^2x^*(t)}{dt^2} &= \int_0^t \frac{d^2k(t-s)}{ds^2} f(s)ds + \dot{k}(0)f(t) = \int_0^t \frac{d^2k(t-s)}{ds^2} f(s)ds + f(t).\end{aligned}$$

容易验证 $x^*(t)$ 是非齐次方程(3.1)的特解。

3.2 n 阶线性方程

考虑方程

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_nx = f(t). \quad (3.6)$$

有特征方程

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

和解 $\lambda_{1,2,\dots,n}$ 。

设 $\mathcal{L}_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda + \cdots + a_n$, 则 $\mathcal{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)$ 是一个 n 阶算子。齐次方程可以写成 $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$ 。设 λ_1 为特征方程的一个根, 则 $\mathcal{L}_n(\lambda) = \mathcal{L}_{n-1}(\lambda - \lambda_1)$, 进而

$$\mathcal{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)x = \mathcal{L}_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)x.$$

命题 3.4. 设 $\lambda_{1,2,\dots,m}$ 是 $\mathcal{L}_n(\lambda) = 0$ 的 m 个不同的根, 对应的重数 $n_1, n_2, \dots, n_m$, 其中 $\sum_{i=1}^m n_i = n$, 则齐次方程

$$\mathcal{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$$

的复值通解可以表示为

$$x(t) = \sum_{i=1}^m p_i(t)e^{\lambda_i t},$$

其中 $p_i(t)$ 是任意 $n_i - 1$ 次复系数多项式。

证明. 对 n 用归纳法, $n = 1, 2$ 时已经证明。令 $D = \frac{d}{dt}$ 。

假设 $n-1$ 时成立上述表达, 考虑 $\mathcal{L}_n(D)x = 0$ 。设 λ_1 是 $\mathcal{L}_n(\lambda) = 0$ 的一个根, $\mathcal{L}_n(D)(x) = \mathcal{L}_{n-1}(D)(Dx - \lambda_1x) = 0$ 。于是根据归纳假设, 有

$$Dx - \lambda_1x = \sum \tilde{P}_i(t)e^{\lambda_i t},$$

其中若 λ_1 的重数大于 1, 则 $\tilde{P}_1(t)$ 是 $n_1 - 2$ 次复系数多项式, 其余不变。

假设 $\lambda_2 \neq \lambda_1$ 是另一个根, 也有

$$Dx - \lambda_2x = \sum \hat{P}_i(t)e^{\lambda_i t}.$$

如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 两式相减容易得到结论。

如果特征方程的所有根都相等, 其实有

$$\frac{dx}{dt} - \lambda x = \bar{P}_1(t)e^{\lambda t}, \quad \lambda = \lambda_{1,2,\dots,n}.$$

由一阶线性方程的结论立得。 $\square$

命题 3.5. 设 $\lambda_{1,2,\dots,s}$ 是特征方程的 s 个不同的实根, 对应重数为 $n_1, n_2, \dots, n_s$, $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_q \pm i\beta_q$ 是特征方程的 q 对不同的共轭虚根, 对应重数为 $m_1, m_2, \dots, m_q$, 且 $\sum_{i=1}^s n_i + 2\sum_{j=1}^q m_j = n$, 则 n 阶齐次方程 $\mathcal{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right) = 0$ 的实值通解可以表示为

$$x(t) = \sum_{i=1}^s p_i(t)e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^q e^{\alpha_j t} (M_j(t) \cos \beta_j t + N_j(t) \sin \beta_j t).$$

其中 $p_i(t)$ 是次数为 $n_i - 1$ 次的实系数多项式, $M_j(t), N_j(t)$ 是次数为 $m_j - 1$ 次实系数多项式。

证明. 只需在复系数通解中令 $x(t) = \overline{x(t)}$ 即可。 $\square$

对于一般的非齐次方程(3.6)的实值通解, $x(t) = x_1(t) + x^*(t)$,

$$x^*(t) = \int_0^t k(t-s)f(s)ds,$$

并且

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n(D)k = 0 \\ k(0) = 0, \dot{k}(0) = 0, \dots, k^{(n-2)}(0) = 0, k^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

例.

$$\ddot{\ddot{x}} + \alpha \ddot{x} + x = f(t).$$

其中 $f(t) \equiv 0$, 以及 $f(t) = t$ 。

例. 构造常系数线性方程使得

$$e^t \cos t, e^t \sin t, te^t \cos t, te^t \sin t$$

是解, 且次数尽量低。

作业: 85-86 页/13,16, 95-96 页/1/(1)(2)(3),3/(1)。

例 (逆算子的观点). 考虑下面的方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t).$$

记 $D = \frac{d}{dt}$, 原方程可以写成 $Dx = f$. 可以发现 $x^*(t) = \int f(t)dt$ 是一个特解, 即

$$D \left(\int f(t)dt \right) = f(t),$$

写成 $DA = I$, 那么 A 就是 D 的逆算子. 可以写成 $A = D^{-1}$, 特解 $x^*(t) = D^{-1}x(t)$.

一般地, 考虑 $P(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_nI$, 而方程可以写成

$$P(D)x(t) = f(t).$$

方程的特解在形式上就是

$$x^*(t) = \frac{1}{P(D)}f(t),$$

其中 $\frac{1}{P(D)}$ 为 $P(D)$ 的逆算子。

命题 3.6. 1. $\frac{1}{P(D)}af(t) = a\frac{1}{P(D)}f(t)$;

2. $\frac{1}{P(D)}(f(t) + g(t)) = \frac{1}{P(D)}f(t) + \frac{1}{P(D)}g(t)$;

3. 若 $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, 则

$$\frac{1}{P(D)}f(t) = \frac{1}{P(D_1)}\frac{1}{P_2(D)}f(t);$$

4. $\frac{1}{P(D)}\sin \beta t = \text{Im} \left(\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t} \right)$, $\frac{1}{P(D)}\cos \beta t = \text{Re} \left(\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t} \right)$.

3.2.1 逆算子的求解

1 若 $P(\lambda) \neq 0$, 则

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t} = \frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}.$$

只需验证,

$$P(D) \left(\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t} \right) = \frac{1}{P(\lambda)}P(D)e^{\lambda t} = \frac{1}{P(\lambda)}P(\lambda) = 1.$$

例. 若 $P(-\beta^2) \neq 0$,

$$\frac{1}{P(D^2)}\sin \beta t = \frac{1}{P(D^2)}\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} = \frac{1}{P(-\beta^2)}\sin \beta t.$$

对 $\frac{1}{P(D^2)}\cos \beta t$ 也是类似。

2

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t).$$

用归纳法来证明 (对阶数 n 使用)。当 $n=1$ 时, $P(D) = D - a_1$,

$$\begin{aligned} P(D)\left(e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)\right) &= (D - a_1)\left(e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)\right) \\ &= \lambda e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) + e^{\lambda t}D\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) \\ &\quad - a_1 e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) \\ &= e^{\lambda t}(\lambda + D - a_1)\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t) = e^{\lambda t}f(t). \end{aligned}$$

假设上述公式在 $n-1$ 时成立, 则考虑 n 阶情形。 $P_n(D) = P_{n-1}(D)P_1(D)$ 。

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n(D)}e^{\lambda t}f(t) &= \frac{1}{P_{n-1}(D)}\frac{1}{P_1(D)}e^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}\frac{1}{P_{n-1}(D+\lambda)}\frac{1}{P_1(D+\lambda)}f(t) \\ &= e^{\lambda t}\frac{1}{P_n(D+\lambda)}f(t). \end{aligned}$$

例.

$$\frac{1}{D-a}f(t) = \frac{1}{D-a}e^{at}e^{-at}f(t) = e^{at}\frac{1}{D}e^{-at}f(t) = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt.$$

例. 方程

$$(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)x = (t+1)e^t.$$

特征方程 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ 的根 $\lambda_{1,2,3,4} = 1$ 。通解

$$x_1(t) = e^t(c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4), \quad c_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}.$$

特解只需求出

$$x^*(t) = \frac{1}{(D-1)^4}(t+1)e^t = e^t\frac{1}{D^4}(t+1) = e^t\left(\frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24}\right).$$

原方程的解即为 $x(t) = x_1(t) + x^*(t)$ 。

例.

$$P(D) = (D - \lambda)^s g(D), \quad g(\lambda) \neq 0.$$

则

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\frac{1}{D^s}\frac{1}{g(D+\lambda)}e^{0t} = e^{\lambda t}\frac{1}{D^s}\frac{1}{g(\lambda)} = \frac{e^{\lambda t}}{g(\lambda)}\frac{t^s}{s!}.$$

例.

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{1}{D}e^{at} \sin bt = e^{at}\frac{1}{D+a} \sin bt = e^{at} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{D+a} e^{ibt} \right) = e^{at} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{ib+a} e^{ibt} \right).$$

3

$$\frac{1}{P(D)}f(t),$$

其中 $f(t)$ 是 k 次多项式。若有

$$1 = P(\lambda)Q_k(\lambda) + R_{k+1}(\lambda)$$

其中 Q_k 是 k 次, R_{k+1} 最低是 $k+1$ 次多项式。则

$$f(t) = (P(D)Q_k(D) + R_{k+1}(D))f(t) = P(D)Q_k(D)f(t) \implies \frac{1}{P(D)}f(t) = Q_k(D)f(t).$$

例. 方程

$$(D^3 - D)x = t$$

的特解

$$x^*(t) = -\frac{1}{D} \frac{1}{1-D^2} t = -\frac{1}{D} (1 + D^2 + D^4 + \cdots) t = -\frac{t^2}{2}.$$

例. 方程

$$(D^2 + 1)x = te^t \sin t.$$

的特解

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{1}{1+D^2} te^t \sin t = e^t \frac{1}{D^2 + 2D + 2} t \sin t = e^t \operatorname{Im} \left(\frac{1}{D^2 + 2D + 2} e^{it} t \right) \\ &= e^t \operatorname{Im} \left(e^{it} \frac{1}{(D+i)^2 + 2(D+i) + 2} t \right). \end{aligned}$$

Chapter 4

线性微分方程组

考察方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t),$$

其中 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, a_{ij}, f_i, a_i 都是定义在 (α, β) 上的函数。这样的方程称为线性常微分方程组, 如果 $\mathbf{f}(t) \equiv 0$, 则称为齐次方程。

4.0.1 对于矩阵值函数的基本运算

1

$$\frac{d}{dt}A(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = (\dot{a}_{ij}(t))_{n \times n}.$$

2

$$\int_a^b A(s)ds = \left(\int_a^b a_{ij}(s)ds \right).$$

3

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt}.$$

例.

$$\frac{d}{dt}A^2(t) = \frac{dA(t)}{dt}A(t) + A(t)\frac{dA(t)}{dt}.$$

4

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = -A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t).$$

引入向量范数, 矩阵范数。

¹注意矩阵未必交换

作业: 103 页/1,3,5。

对 $\mathbb{R}^n$ 上运算 $\|\cdot\|$, 若满足一下性质:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $\mathbf{x} = 0$;
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的向量范数。

例. 对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

都是范数。

在 $\mathbb{R}^n$ 上, 设 $\|\cdot\|_A$ 和 $\|\cdot\|_B$ 是任意两种向量范数, 那么是否存在某种等价性? 即是否存在常数 c_1, c_2 使得

$$c_1 \|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_A \leq c_2 \|\cdot\|_B.$$

命题 4.1. $\mathbb{R}^n$ 上任意两个范数都等价。

证明. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上任意范数, 只需证明其与 2-范数 $\|\cdot\|_2$ 的等价性。进一步, 记 $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, 若 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 考虑在 2-范数意义下的单位球面 $S = \{\|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ 上, 因为 S 是紧集, f 可以取到最大值 c_2 与最小值 c_1 , 这表明

$$c_1 \leq f(\mathbf{x}) \leq c_2, \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

那么对任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2} \in S$, 代入上式, 就有

$$c_1 \leq f\left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}\right) \leq c_2 \implies c_1 \|\mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{y}\| \leq c_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

现在只需证明 f 在 $\|\cdot\|_2$ 的意义下连续。若 $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\|_2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, 那么

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0)| &= |\|\mathbf{x}_m\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\| = \|(x_m^i - x_0^i)\mathbf{e}_i\| \leq |x_m^i - x_0^i| \|\mathbf{e}_i\| \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_m^i - x_0^i|^2 \sum_{i=1}^n \|\mathbf{e}_i\|^2} = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\|_2 \|\mathbf{r}\|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是一组标准正交基。 □

由向量范数定义涉及的三条性质可以直接拓展定义矩阵范数。

例. 下面都是矩阵范数:

$$1. \|A\|_{\text{Frobenius}} = \left(\sum_{i,j} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

$$2. \|A\|_M = \max_{i,j} \{|a_{i,j}|\}.$$

例. 特别地, 有由向量范数诱导出的矩阵范数, $\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. 由此可以验证诱导出的运算是矩阵范数, 同时还有性质

$$1. \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|,$$

$$2. \|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

$$3. \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

证明. 1. 由定义立得。

2. 一方面, 对任意 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 有 $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| = \|A\|$, 所以 $\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \|A\|$ 。

另一方面, 对任意 $\|\mathbf{y}\|$, $\left\| \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\| = 1$, 且

$$\left\| A \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \implies \|A\| = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

3. 只要注意到

$$\|AB\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|B\| \|\mathbf{x}\|$$

即可。 □

例. 由不同的向量范数可以导出不同的矩阵范数。

1.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}.$$

2.

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

3.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_m(A^T A)}.$$

作业：验证由向量 1-范数诱导的矩阵范数 $\|\cdot\|_1$ 的表达式。

4.0.2 e^{At} 的定义以及性质

$$e^{At} \triangleq I + A + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}.$$

其中,

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{A^kt^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^m \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \leq e^{|b-a|\|A\|}, \quad t \in [a, b] \subset (-\infty, +\infty).$$

由此上述矩阵值函数项级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上内闭一致收敛。进一步,

$$A \int_0^t e^{As} ds = A \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^ks^k}{k!} ds = A \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{A^ks^k}{k!} ds = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^{k+1}}{(k+1)!} = e^{At} - I.$$

性质

$$1. \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

$$2. (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

3. 线性常微分齐次方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

的初值问题解于 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且唯一, 是 $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$ 。

$$4. e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}.$$

作业：116 页/1,6。

考虑常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(x) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

容易发现

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s)ds.$$

唯一性可以由两个解相差一个齐次方程的解这一性质得到。

例 (计算 e^{At}). 1. $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则

$$e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

2. $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, 则

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & e^{A_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{A_s t} \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}$ 。因此

$$e^{At} = e^{PP^{-1}APP^{-1}t} = e^{P^{-1}APt} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 。则

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

因此

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

5. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, 则有 $A = tI + B$, B 是幂零阵。那么

$$e^{At} = e^{(\lambda I + B)t} = e^{\lambda It} e^{Bt} = e^{\lambda t} \left(I + Bt + \frac{1}{2!} B^2 t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} B^{n-1} t^{n-1} \right).$$

例. 方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。由上面的例子很容易算出解

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 = e^{At}\mathbf{c}.$$

命题 4.2. 若系数矩阵 A 具有完全特征向量系 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$, 对应特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ 的通解可以表示为 $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i$, $c_i \in \mathbb{R}$ 。

例. 方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta y + \alpha x. \end{cases}$$

矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, 有共轭的特征值 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{p}_1 + c_2 e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{p}_2.$$

如果令 $x = \bar{x}, y = \bar{y}$, 就得到实值通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{u}_2$ 。

例. 方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_{1,2} = 1$, 则存在 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 使得 $A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 e^t \mathbf{p}_1 + c_2 e^t (t\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2).$$

对解 $\mathbf{x}(t)$ 作估计, 设矩阵 A 的特征值满足 $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq \alpha$, 并且等号成立是特征值对应的 Jordan 块阶数为 1, 则解满足 $\|\mathbf{x}(t)\|$ 在 $[0, +\infty)$ 上有上界。