Riemann 几何笔记

Yuang Lu

2025 秋

Chapter 1

2025/9/11

作业在每周习题课前提交，从第二次开始，教材:《黎曼几何讲义》忻元龙，参考材料: *Riemann Geometry, do Carmo.*

本笔记遵守 Einstein 求和约定.

1.1 Riemann 度量

定义 1.1. 在光滑流形 M 上的光滑二阶共变对称张量场称为 *Riemann* 度量，即对于每个点处的切空间，光滑地指定一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. 带有 Riemann 度量的光滑流形称为 Riemann 流形.

由于每个点处的切空间都有了内积，所以我们可以定义切向量 X 的模长为

$$\sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

还可以定义两个切向量 X, Y 之间的夹角为

$$\arccos \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|}.$$

此外，对于 M 上的光滑曲线段 $c : I \to M$，其中 I 是闭区间，可以定义其长度

$$\ell(c) = \int_I |\dot{c}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

在坐标卡 (U, φ) 中，可以写出 Riemann 度量的局部坐标表示. 具体而言，取 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ 为 T_pM 的一组基，设 $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$，则 Riemann 度量可以写成

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j.$$

例. 每个紧联通 Lie 群上都有双不变 Riemann 度量.

证明. 设 G 是一个 n 维 Lie 群.

首先证明：对任意 G 上的左不变 n-形式 ω，ω 也是右不变的. 对任意 $a \in G$，$R_a^*\omega$ 也是左不变形式，因此与 ω 只差一个数量关系，即 $R_a^*\omega = f(a)\omega$，其中 $f(a) = \frac{R_a^*\omega(e)}{\omega(e)}$. 那么存在关系 $f(ab) = f(a)f(b)$，因此 f 是 G 到 $\mathbb{R}^\times$ 的群同态，而且连续. 结合 G 是紧联通 Lie 群，$f(G) = \{1\}$. 所以 $R_a^*\omega = \omega$ 对所有 $a \in G$ 成立.

其次，对于任意点 e 处的 n-形式，都可以通过左平移沿拓到 G 上，成为一个双不变的 n-形式，设为 ω. 如果 G 上原先有一个 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，则可以定义新的 Riemann 度量

$$\langle u, v\rangle_y' = \int_G \langle (R_x)_* u, (R_x)_* v\rangle_{yx}\omega.$$

这是左不变的，因为 ω 是左不变的；这是右不变的，因为对所有右平移作了积分. □

1.2 Levi-Civita 联络

定义 1.2. 称 ∇ 为联络，如果对每对 M 上的向量场 X 和 Y，都有向量场 $\nabla_X Y$，且满足

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

命题 1.1. 对每个 Riemann 流形，存在唯一的联络 ∇ 满足

1. $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

证明. 反复利用 1 和 2，就有

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla_X Y, Z\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle\nabla_Z X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle\nabla_Y Z, X\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + Y\langle Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\
=&X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + Y\langle Z, X\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle\nabla_X Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

于是

$$\langle\nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\right).$$

这唯一确定了一个联络. □

定义 1.3. 上述命题中的联络称为 *Levi-Civita* 联络，性质 1 的几何意义是与 Riemann 度量相容，性质 2 的几何意义是无挠.

设 ∇ 为联络，

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

则系数 Γ_{ij}^k 称为 Christoffel 记号. 对 Levi-Civita 联络而言，根据命题1.1的结果，结合 $[\partial_i, \partial_j]$，可以计算

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right).$$

因此两边乘以 (g^{kl}) 并更改指标，有

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

定义 1.4. 设 $c : [a, b] \to M$ 是 Riemann 流形 M 上的一条光滑曲线，如果 c 上的光滑向量场 X 满足

$$\nabla_{\dot{c}} X \equiv 0,$$

其中 ∇ 为一个联络，则称 X 沿 c 平行移动.

命题 1.2. 对于光滑曲线 $c : [a, b] \to M$ 和向量 $X_0 \in T_{c(a)}M$，则在 c 上存在唯一的光滑向量场 X 满足 $X(a) = X_0$ 且 X 沿 c 平行移动.

证明. 只需对定义在一个坐标卡 (U, φ) 中的曲线 c 证明即可. 实际上，如果设 $X = X^i \partial_i$，$\dot{c} = x^i \partial_i$，则

$$\nabla_{\dot{c}} X = \nabla_{\dot{c}}(X^i \partial_i) = (\nabla_{\dot{c}} X^i)\partial_i + X^i(\nabla_{\dot{c}}\partial_i) = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t}\partial_i + X^i x^j \nabla_{\partial_j}\partial_i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t}\partial_i + X^i x^j \Gamma_{ji}^k \partial_k.$$

因此条件可以转化为常微分方程组

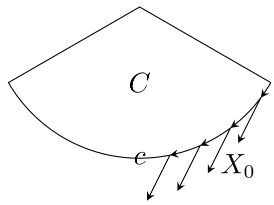
$$\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t} + X^i x^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

由常微分方程的理论，这个方程存在唯一解. □

例. 设 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球，c 是 S^2 上的一个圆，X_0 是 c 上某点处的切向量. 考察 X_0 在 c 上的平行移动.

发现将 c 视作 S^2 上的曲线，和视作与 S^2 切于 c 的圆锥上的曲线，是等效的，包括各点处的切空间都相同. 因此可以不妨在这个圆锥上考虑问题. 发现圆锥是可展的，展开后平行移动依然是平行移动. 将欧式平面上的平行移动对应到球面（圆锥）上就是沿着 c 的平行移动.

注记. 不难发现，在 $\mathbb{R}^3$ 中观察上述平行移动，X_0 似乎在以恒定角速度旋转.



例. 上半平面

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$$

在运算

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2 y_1, y_1 y_2)$$

下构成一个 Lie 群. 在 $T_{(0,1)}\mathbb{R}^2_+$ 中定义与欧式空间这个点相同的内积，那么左乘映射 $L_{(x,y)}$ 诱导一个左不变的 Riemann 度量. 即对于 X, Y 在 $\mathbb{R}^2_+$ 的 Lie 代数中，

$$\langle (L_{(x,y)})_* X, (L_{(x,y)})_* Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

结合 $\mathrm{d}L_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, 可知这样定义的 Riemann 度量就是

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}.$$

计算对应的 Levi-Civita 联络的 Christoffel 记号，有

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = \tfrac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{12} = -\tfrac{1}{y}, \\ &\Gamma^2_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = -\tfrac{1}{y}. \end{aligned}$$

设 $X_0 = (0,1)$ 是点 $(0,1)$ 处的切向量，那么可以计算 X_0 沿着曲线 $c(t) = (t,1)$，$t \in \mathbb{R}$ 的平行移动. 根据命题1.2证明中的计算，c 上的向量场 $X(t) = X^i \partial_i$ 需要满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X^1}{\mathrm{d}t} + X^2 x^1 \Gamma^1_{12} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}t} + X^1 x^1 \Gamma^2_{11} = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} X^1 = \sin(t), \\ X^2 = \cos(t). \end{cases}$$

在欧式空间中看这实际上是一条摆线.